

基於灰色理論之短期銷售預測方法

錢炳全、李順益
義守大學資訊工程學系
cbc@isu.edu.tw

王學亮
高雄大學資訊管理學系

摘要

商業交易所獲得的利潤，是維繫公司永續經營的最大要素。產業界為獲取較高的利潤，客戶訂單預測是現代企業資源規劃系統及供應鏈管理系統中與客戶維持一定良好的關係的一項重要任務。目前產業界通常使用統計預測方法，來事先規劃長程的產能擴充計畫及短程的生產計畫，希望能使得客戶訂單在交期準確性上，得到一個較令人滿意的結果。但傳統的預測方法需要大量的歷史資料，才能使得預測值有一定的準確性。但現今科技的進步使得消費性產品的生命週期越來越短，企業在利用傳統的預測方法做短期銷售預測時，往往尚未收集足夠的觀察值，該產品便已從市場上消失。因此本研究就是利用灰色理論中灰預測的簡易、少數據之特性，來設計一套包含二個灰預測模式來達成有效的短期預測架構。實驗結果顯示，我們所提出的方法可以在短期預測上得到較準確的結果，並且比以往的方法更加穩定與簡單。

關鍵字：客戶關係管理、灰色理論、灰預測、銷售預測

The Short-term Sale Forecasting based on Grey Theory

Been-Chian Chien, Shun-Yi Lee
Department of Information Engineering
I-Shou University

Shyue-Liang Wang
Department of Information Management
National University of Kaohsiung

ABSTRACT

The main purpose of business is to make money. For maintaining a good relationship with customers and maximizing the productivity of the company, sale forecasting is an important task in most of the ERP and SCM systems. The traditional sale forecasting uses the techniques of prediction based on statistical theory, which need large amount of historical data. However, the life cycle of commercial products are shorter than before. Even a product has disappeared before the enough data for sale are collected to support forecasting. This paper proposes new methods for short-term sale forecasting based on Grey prediction theory. We design two Grey prediction models to complete the task of short-term sale forecasting. The experiments show that the proposed methods have better accuracy in short-term prediction. Besides, the new methods provide a stable and simple model for prediction in comparison with the previous methods relatively.

Keywords: Customer relationships management(CRM), Grey theory, Grey prediction, Sale forecasting.

壹、概論

商業的主要目的在於謀取利潤，為獲取較高的利潤，使公司能永續經營，產業界無不想盡辦法與客戶維持一定良好的關係，因為客戶是公司獲取利潤的最主要來源，因此維持客戶關係，滿足客戶需求，是每一家公司努力的目標。通常客戶在商業行為中最在意的不外乎：產品售價(Price)、產品品質(Quality)、產品功能(Function)、訂單交期(Delivery)與售後服務(Service)等五項指標，所以使客戶對於上述五項指標滿意，等於是做好了最基本的客戶關係管理。而公司與客戶最直接且頻繁的關係，可以說是維繫在兩者間的訂單買賣關係，若是沒有訂單，公司就無法獲取利潤，維持公司的存續就會出問題。因此訂單的獲得，是一切商業公司生存的基礎。接獲訂單後，各別產業才能依其企業資源規劃系統，加以運作生產。

企業資源規劃系統的功能，目前均已發展到相當成熟的階段，企業界所能運用的 ERP 如 SAP、Oracle、Baan 等公司的產品，已經十分普遍地被企業所採用。然而，如何滿足客戶對交期上的需求一直是相當困難的課題，因為我們無法確實掌握客戶未來的需求及市場的外在變化。影響產品訂單交期準確性的因素，可以歸納如下：

- (1) 生產產能擴充不足，造成客戶訂單大於生產能力，無法滿足每一個客戶的訂單需求。
- (2) 客戶訂單交期低於製造前置時間，無法即時生產，將產品如期交付客戶。
- (3) 產品生產良率太低。

以上除第(3)項與生產的技術有關，必須依賴生產製程的不斷改善才能克服之外，前第(1)、(2)兩項的影響因素，則是因為無法事先掌握客戶及市場的需求所導致的，目前產業界都是應用預測方法來預測公司未來長短程的銷售量，然後再利用這些預測數據，加上公司的營運策略來規劃長程的產能擴充計畫及短程的生產計畫，以利客戶訂單在交期準確性上，得到一個較令人滿意的結果。

預測(Prediction)是一種資料探勘的相關技術，通常都是利用各種統計(Statistics)或迴歸(Regression)的方法，從過去的歷史資料中找出有用的趨勢或是模式，然後利用這些趨勢或模式來求得下一期間或週期的預測值。要進行任何預測之前，收集足夠的有效觀察值是一種必要的程序。在以往統計或迴歸的方法中，均需要大量的有效觀察值，才能夠準確的判斷出預測結果。然而由於現今科技與媒體的進步，許多的消費性產品不斷的在推陳出新，同時各種個性化的產品也應運而生，使得產品的生命週期越來越短，例如：Intel 中央處理器(CPU)的生命週期已經從已往的十八週，到目前幾乎每半年推出一款新產品。所以往往在尚未收集到符合傳統預測方法所需的觀察值時，產品可能已經從市場上消失了。若強行利用這些不足量的觀察值以傳統方法來進行預測，則所得的預測誤差率也隨之提高，間接影響到公司的營運及獲利。因此如何利用少數數據而能夠達到相當精確程度的預測，是一個相當值得加以探討的問題。為了達到適合較短生命週期的產品預測的目的，本篇論文提出以灰色預測來解決傳統方法在短期銷售之誤差大的問題，並分析討論不同期別數據的預測適用性；最後以實驗驗證，來探討不同預測方法與週期間之關係。

本篇論文其他部份共分為五節如下：第貳節中將回顧目前企業所運用的預測方法並比較分析其優缺點。第參節簡介灰色預測系統理論與方法。第肆節說明我們所提出的銷售預測模式(Sales Forecasting Model, SFM)、系統架構以及如何應用灰預測，達到短期銷售預測的方法。第伍節說明實驗與實務應用的結果，並探討灰色預測在短期預測的適用性。第陸節說明本研究的結論和未來研究方向的建議。

貳、現行預測方法之回顧

公司銷售之預測，是指該公司對各種產品在未來某一定期間中，可能獲得之銷售預估。而預測僅就過去事實，參照內外環境因素，給予預估或猜測而已，所以預測不可能全部正確。但因各項生產計劃，原物料之採購，機器設備之擴充，員工人力之需求等，均以銷售預測為依據，故預測已公認為必需，問題在如何獲得較正確之預測結果。預測方法一般可分為主觀意見預測法(Subjective opinion forecast)與依據過去資料之時間序列(Time Series)數學方法兩大類[2]。

主觀意見預測法是參照過去資料，以個人主觀意見分析各種因素，不同的個人經驗對預測結果，影響甚大。常用方法有下列幾種：

- (1) 各部門主管集體討論法(Jury of executive opinion method)
- (2) 銷售人員匯集意見法(Sales force composite method)
- (3) 顧客期望法(Users' expectations method)
- (4) 指標法(Index method)

傳統的主觀意見預測法因為人為意見的影響較大，無法利用電腦技術來協助進行預測，目前已經普遍不被企業所使用。時間序列的數學方法是以過去資料之時間序列為主，而其基礎為假設未來之情形與過去情勢相雷同，因此若有某因素改變情形時，必須參照判斷予以修正，預測才能正確。而時間序列是指一個固定間隔為基礎，經過了一段時間(如每小時、每日、每月、每週、每月、每季、每年)之時間序列的觀察結果。常用的數學方式預測方法有下列幾種：

- (1) 移動平均法(Moving average)
- (2) 指數平滑法(Exponential smoothing)
- (3) 預備庫法(Standard deviation)

目前電腦科技被普遍運用在企業的管理資訊系統上，而所有的銷售歷史資料也被完整的記錄在系統中，所以上述這些數學方法的預測模式，已經被普遍應用在企業資源規劃系統(ERP)中，以進行銷售預測的計算。這些數學預測模式的方法分述如下：

(1) 移動平均法：

歷史資料通常含有某一種程度的隨機變動或是雜訊變數(Noise)，而使得在資料中對稱性移動的趨勢減弱。隨機變動乃源於許多很不重要的因素的影響，但卻無法預測。以理想的情況而言，最好是能夠完全把這些隨機變動從資料中除去，而只留下真正的變動，諸如需求水準的變動。然而，實際而言，通常我們無法辨別這兩種變動情形，所以最好的方法就是能夠過濾隨機變動，而使非隨機變動因素固定不動。因此，微小的變動都被視為隨機性的，且都過濾掉了，平均的技巧就是依此目的而發展出來的。

移動平均法[2][3]是利用平均的技巧(Averaging techniques)對於時間數列中的某些大變動使之平滑，因為資料中特別高或特別低的觀察值，當組成一平均數時就會彼此抵消一些。移動平均值就是一平均值一直被反覆地修正：當新的觀察值變成可行時，數列中的舊值就被刪除了，由此而保持平均值為最新的。而最常見移動平均法的有下列三種方法：

- (1.1) 簡易移動平均法(式 1)是將期數 T 內所有的觀察值加總後再除以期數。亦即算出最近某一期間的時間數列平均值，並把該平均值視為即將來臨的期間之預測值 \hat{x}_{t+1} 。

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i \quad (1)$$

(1.2) 二次移動平均法(式 2)是將簡易移動平均法所得的值,再做第二次的移動平均運算

$$\hat{x}_{t+1}^{(2)} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{x}_i \quad (2)$$

(1.3) 加權平均(Weighted average)(式 3)是期數內的每一個觀察值,給與不同的權數(權數總合為 1),最後再求其總合。由於有選擇權數的考慮,它可達到反應出變化的功能。

$$\hat{x}_{t+1} = \sum_{i=1}^T \alpha x_i \quad (3)$$

移動平均法其優點在於計算相當簡單,但其缺點則有:

- 預測值在週期性的變動時,會有延遲的現象。
- 權數的選擇含有人為主觀因素,易造成判斷上的錯誤。
- 期數愈多時,平滑與延遲的長度愈長。

(2) 指數平滑法:

指數平滑法[2][3]是運用的最廣的一種預測方法,實際上它也是加權移動平均的一種形式。它的好處是在於加權型態能很輕易的改變,以配合特殊情形的需要,且它只需要很小的資料儲存空間。基於僅需很小的資料儲存空間優點,特別是當許多項目皆須作預測時,指數平滑法很適合電腦化之使用。因為移動平均方法卻須要保有所有組成平均值的資料,若預測項目多時,則資料的儲存空間將會很大。

指數平滑的權數須取自歷史資料:最近之值有較大的權數,而當資料的年數增加時,權數就自動的減小。此方法非常簡單,是每一個新的預測值都是前一個預測值加上前期實際值與前期預測值之差異的百分比。與移動平均法相同的,此方法也有兩種不同運用的方式:

(2.1) 簡單指數平滑法(式 4)就是如上述所示,就是將前期實際值與前期預測值之差異乘上一個平滑常數(Smooth constant)(通常此一指數介於 0.1~0.5 之間),然後再加上前期預測值。若以前沒有預測值而要做指數平滑時,開始時可用最後 n 個期間的資料平均來做預測。

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \alpha(x_t - \hat{x}_t) \quad (4)$$

(2.2) 趨勢調整的指數平滑法(Trend-adjusted smoothing)(式 5)是利用簡單指數平滑法所得的預測值,再以第二個平滑常數來求得最後的預測值。此法能指出一個更明顯的趨勢。

$$\hat{x}_{(t+1)}^{(2)} = \hat{x}_t^{(1)} + \alpha(\hat{x}_t^{(1)} - \hat{x}_{t-1}^{(1)}) \quad (5)$$

指數平滑法其缺點是在平滑常數的選擇上也和移動平均法一樣,會因人為主觀的選擇而產生不同的預測值。但相對這也是優點之一,也就是加權型態可以很輕易改變,同時指數平滑法另一個優點就是減去了期數這項影響預測準確性因子。

(3) 預備庫存法

預備庫存法是標準差(Standard deviation) [4]的一種運用(式 6),它是藉由如何建立有效率的庫存,避免缺料的觀點,來反推未來的需求。其方法便是利用兩項調整因子:庫

存安全係數(K)與庫存調整期間(\sqrt{LT}),再乘上某段期間的標準差。所謂庫存安全係數是指允許缺貨率,任何缺貨率都有一對應的庫存安全係數,用來考慮需求分佈的預測誤差和異常數值的產生等現實條件。庫存調整期間則是指銷售出貨與生產補充期間的時間差異。

$$\hat{x}_{t+1} = \bar{x}_N + K \times \sqrt{LT} \times \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_N)^2}{n-1}} \quad (6)$$

預備庫存法與上述兩種方法相同,其庫存安全係數通常是透過人為主觀的選擇,因此就容易造成判斷上的錯誤。

目前企業界所使用較知名的企業資源規劃(Enterprise Resource Planning, ERP)軟體,例如 Baan 和 SAP 等公司的相關產品[17][18],都有利用上述這些傳統的預測方法來協助企業界做各種的銷售預測。供應鏈管理系統(Supply Chain Management, SCM)便依據這些預測值加上實際的客戶訂單和業務人員經驗的調整,安排採購、製造、品檢、出貨等等一連串的後勤支援工作。所以生產預測的準確性對一個生產製造公司來說,是一項非常重要的工作。

綜合上述三種傳統的數學式預測方法,幾乎都有下列幾項問題存在:

- (1) 權數有其必要性,但容易因人為的選用而造成預測值的偏差,而做出不適當的決策。
- (2) 期數內的觀察值的個數的大小,也是影響預測值準確性的一項因素,而這項因素也是受人的主觀的選擇。
- (3) 需要較大量的觀察值。

表 1：傳統統計方法與灰色預測法的比較

方法	所需最少的數據	數據之型態	數據之間隔	準備時間	數學需求
簡單指數平滑型	5 至 10 個	等間距	短間隔	短	基本
Holt's 指數平滑型	10 至 15 個	同趨勢	短或中間隔	短	稍高
Winter's 指數平滑型	至少 5 個以上	同趨勢且具規率性	短或中間隔	短	中等
回歸分析法	10 或 20 個以上	同趨勢且具規率性	短或中間隔	短	中等
Causal 回歸法	10 個以上	可各種型態相互混合	短、中及長間隔	長	高等
時間序壓縮法	2 個峰值以上	同趨勢、具規率性且可自我調整	短或中間隔	短(稍長)	基本
Box Jenkins 法	50 個以上	等間距	短、中及長間隔	長	高等
灰色預測法	4 個	等間距及非等間距	短、中及長間隔	短	基本

參、灰色預期系統理論

1982 年鄧聚龍提出灰色系統[16]後，就開始被廣泛的運用在生命科學、地質、農業、環保、電力、IT 等數十個領域[6]。而灰色系統理論主要能在系統(System)模型不明確或資訊不完整性的情況下，進行關於系統的關聯分析(Relational analysis)、模型建構(Model construction)，並藉預測(Prediction)及決策(Decision)的方法來探討及瞭解系統。

傳統的預測方法需要較大量的觀察值，才能進行各種方法的預測，所以不太適合運用在短期的預測上。但灰色預測法的特色便是使用少數數據，例如只要有四個已知的觀察值，即可順利進行灰色預測[5]。表 1 列出了傳統預測方法與灰色預測方法的特點。

灰色系統理論中，基於 n 個數據的序列：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)),$$

我們建立 GM(1,1)模型，再利用此模型計算 n 點以後的值 $\hat{x}^{(0)}(n + \xi)$ ， $\xi \in \{1, 2, \dots\}$ ，稱為灰色預測。 ξ 稱為預測步數。此過程可記為

$$IAGO \circ \overline{GM} \circ AGO : x^{(0)} \rightarrow \hat{x}^{(0)}(n + \xi).$$

灰預測有下列幾種[6]：

- (1) 數列灰預測(Sequence Grey prediction)：

數列預測是灰預測的基本類型，它是根據給定的數據(數列)，直接建立 GM(1,1)模型進行預測。由於在指定的時刻，這種預測只能得到一個預測值，因此亦稱為單值預測。
- (2) 災變灰預測(Calamities Grey prediction)：

給定的數列中，若出現過大或過小的異常值，我們便稱這些為災變值，相應的點稱為災變點，原有數列稱含災變的數列。所謂災變預測就是這些灰時間分佈的預測，所建立的灰色預測模型，即灰數的時間分佈預測模型。
- (3) 季節災變灰預測(Seasonal calamities Grey prediction)：

若災變發生在每年特定時區，人們對這些災變事件的時間分佈進行預測，稱為季節災變預測。
- (4) 拓樸灰預測(Topological Grey prediction)

拓樸預測是季節災變預測的延伸，它與季節災變預測的區別在後者是通過給定的水平線與災圖的交點，獲得時間分佈序列。
- (5) 系統灰預測(Systematic Grey prediction)

如果系統行為有多種表現，則其預測的難度必然大於一種表現的情況。當多種表現之間沒有太多的關係，或者雖然有關係，但人們可以不注意或淡化，則可利用多個 GM(1,1)模型對系統的行為進行預測。

而本篇研究就是利用數列灰預測的技術，對於少數數據的短期商業預測提出適用性的探討。因此我們針對數列灰預測做進一步說明，數列灰預測法進行的方式可以分為下列五個步驟：

步驟 1：首先列出觀察數列，即原始數列 $x^{(0)}$ ：

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)) \\ &= (x^{(0)}(k); k = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

步驟 2：進行累加生成 AGO 處理，定義 $x^{(1)}$ 為 $x^{(0)}$ 的一次 AGO 序列

$$x^{(1)} = \left(\sum_{k=1}^1 x^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 x^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \right).$$

步驟 3：平均值計算 $z^{(1)}(k)$ ：

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1).$$

步驟 4:再來求出發展系數 a 和灰作用量 b ：

$$a = \frac{\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - (n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - \left[\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \right]^2},$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - \left[\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \right]^2}.$$

令

$$C = \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k), \quad D = \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k), \quad E = \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k), \quad F = \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2$$

則

$$a = \frac{D \times C - (n-1) \times F}{(n-1) \times F - D^2}, \quad b = \frac{F \times C - D \times E}{(n-1) \times F - D^2}.$$

步驟 5：最後再進行預測值的運算：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{-a}) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak}.$$

在生成及建模後，接著就可以對下一點做預測，但預測與實際值之間一定會有誤差產生，灰色理論的誤差分析及量化的方式利用下列基本公式來衡量：

$$e(k) = \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\%,$$

其中 $e(k)$:殘差大小， $x^{(0)}(k)$:原始數列之數據， $\hat{x}^{(0)}(k)$:預測的數列數據。

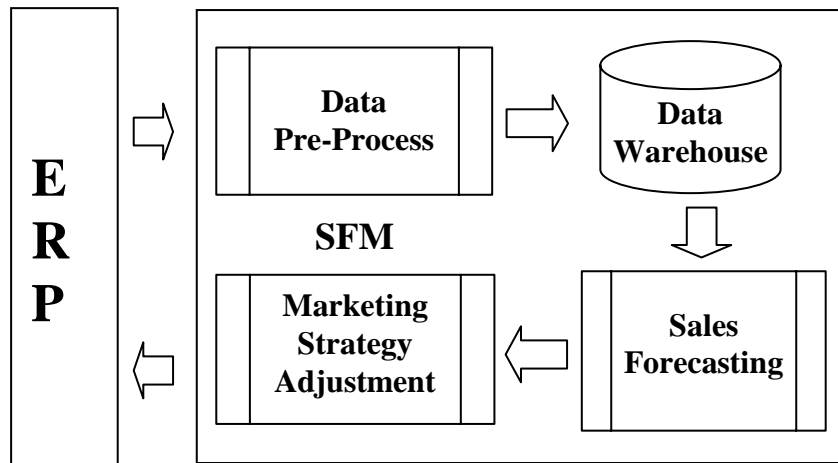


圖 1: 灰色銷售預測系統架構

肆、灰色銷售預測方法與系統架構

為了使灰色預測方法與現行企業的資訊管理系統結合，我們設計了一個灰預測應用於短期銷售預測的模型(Sale Forecasting Model, SFM)，如圖 1 所示。整個系統的運作是首先由企業資訊管理系統把所有的銷售訂單，依短期銷售預測系統所需要的資料格式，定期輸出給短期銷售預測系統，而短期銷售預測系統再將這些由企業資訊管理系統所輸入的資料，經過資料預處理、儲存、預測和調整等過程，最後把預測的結果輸出到企業資訊管理系統。而企業資訊管理系統再根據這些預測的數據，進行生產計劃的安排。

針對整個系統所運用灰色預測演算法，我們提出了兩種預測模式：(1)固定期數灰預測模式(Fixed period prediction model)，(2)動態期數灰預測模式(Dynamic period prediction model)。分述如下：

(1)固定期數灰預測模式

定義：設初始樣本數列為 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(k))$ ， k 為數列的個數。觀察樣本期數為 n 。經由灰預測可得到下一個預測值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{-a})(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} ,$$

其中 a 是發現係數， b 是灰作用量。

輸入：初始樣本數列

輸出：下一個預測數值

演算步驟：

步驟 1：將欲預測的主要訂單數或數列以時間排序，得到 m 個數值。

步驟 2：決定固定期數 n ，取出 n 個連續的數據

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(m-n+1), \dots, x^{(0)}(m-1), x^{(0)}(m)),$$

為便於表示上式轉化為

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)).$$

步驟 3：進行累加生成 AGO 處理， $x^{(1)}$ 為 $x^{(0)}$ 的一次累加生成數列

$$x^{(1)} = \left(\sum_{k=1}^1 x^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 x^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \right).$$

步驟 4：計算平均值

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1).$$

步驟 5：求出發展係數 a 和灰作用量 b

$$a = \frac{\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - (n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - \left[\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \right]^2},$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - \left[\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \right]^2}.$$

步驟 6：最後再計算預測值 $\hat{x}^{(0)}$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^a) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak}.$$

(2) 動態期數灰預測模式

定義：設初始樣本數列為 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(k))$ ， k 為數列的個數。觀察樣本期數為 n ，其期數 n 的選定是依下列兩種方式決定：

(1) 為前期最佳殘差之期數選擇法：

$$n = \text{Arg}(\text{Min}\{e_4, e_5, e_6, \dots, e_{12}\}).$$

(2) 前期最佳平均殘差之期數選擇法：

$$n = \text{Arg}(\text{Min}\{\text{avg}(\sum e_4), \dots, \text{avg}(\sum e_{12})\}).$$

而 e 為殘差大小

$$e = \left| \frac{x^{(0)} - \hat{x}^{(0)}}{x^{(0)}} \right| \times 100\%,$$

然後經由灰預測可得到下一個預測值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^a) \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak},$$

其中 a 是發現係數， b 是灰作用量。

輸入：初始樣本數列

輸出：下一個預測數值

演算步驟：

步驟 1：將欲預測的主要訂單數或數列以時間排序，得到 m 個數值。

步驟 2：先計算殘差 e ，再決定變動樣本數 n ，

$$e_n = \left| \frac{x^{(0)}(n) - \hat{x}^{(0)}(n)}{x^{(0)}(n)} \right| \times 100\%$$

$$n = \text{Arg}(\text{Min}\{e_4, e_5, e_6, \dots, e_{12}\}) \text{ 或 } n = \text{Arg}(\text{Min}\{\text{avg}(\sum e_4), \dots, \text{avg}(\sum e_{12})\})$$

步驟 3：取出 n 個連續的數據

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}(m-n+1), \dots, x^{(0)}(m-1), x^{(0)}(m)),$$

為便於表示上式轉化為

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)).$$

步驟 4：進行累加生成 AGO 處理， $\mathbf{x}^{(1)}$ 為 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的一次累加生成數列

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\sum_{k=1}^1 x^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 x^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k)).$$

步驟 5：計算平均值

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1).$$

步驟 6：求出發展係數 a 和灰作用量 b

$$a = \frac{\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - (n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - [\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)]^2},$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n [z^{(1)}(k)]^2 - [\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)]^2}.$$

步驟 7：最後再計算預測值 $\hat{x}^{(0)}$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^a)[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak}.$$

動態期數的決定方式可以由表 2 中例子說明，假設某期的殘差(e_n)和平均殘差($\text{avg}(\sum e_n)$)如下表，當我們使用前期最佳殘差之樣本數選擇法時， $n=4$ ，但如果使用前期最佳平均殘差之樣本數選擇法時 $n=5$ 。

表 2：變動樣本數的決定範例

n	4	5	6	7
e_n	2.19	12.88	13.12	14.70
$\text{avg}(\sum e_n)$	11.73	11.23	12.21	12.89

伍、實驗結果與分析

本篇研究最主要是要了解灰預測是否可以運用於商業上的短期銷售預測，所以我們收集了業界一家電子公司過去六年的實際銷售資料，共 180 萬筆銷售訂單記錄，將每日每個客戶的每一張銷售訂單，經過分類及彙總等預整理後，我們由兩類資料中各隨機取出三組來驗證是否灰預測能夠在各種不同情況下具有短期預測的準確性。第一類資料是依據產品別所收集的資料(PS)，共有三組每一組各有 72 筆資料，另外一類資料是依據客戶別來收集的資料(CS)，共三組每一組各有 72 筆資料。同時我們依據 SFM 的預測模式，設計了二個實驗：固定期數灰預測模式與動態期數灰預測模式。每一個實驗都利用這六組數據來進行實驗。

(1) 固定期數灰預測模式

經第一項實驗得到如表 3 至表 8 的結果，從統計表中可以清楚的比較出除 CS2 之外，當觀察期數小於六個數據(含)時，利用灰預測所得到的總平均殘差，比其他三種傳統的預測方法有較佳的結果，而改善的程度比指數平滑法($\alpha=0.5$)好約 7.5%，同時也比移動平均和預備庫存兩種方法各改善約 13.3%和 29.1%。所以對於商業預測行為灰預測在少數據的短期銷售預測上，確實可以達到其預期的結果。也就是說灰預測可以改善傳統預測法在少數的短期預測上的一些效果。由圖 2 至圖 7 中更可觀查出：移動平均法(Moving average)將會隨著期數的增加而加大誤差；而預備庫存法(Standard deviation)雖然穩定，但其準確率則與其所設定參數有關，在我們設定同一參數下的準確率表現並無法滿足不同型態的資料；至於指數平滑法(Exponential Smoothing)則是明顯有長期數高準確率的優點，然而在短期數下的表現則不如灰色預測法準確。

對於客戶別 CS2 與 CS3 的預測，如表 7、表 8 與圖 6、圖 7 所示，雖然在短期數(4,5 期)中仍有較佳表現，然而並無法像其他數據般能達到較高期數預測的準確，這是因為該二項資料數據本身前後期間的變動性較頻繁(一上一下)，導致預測誤差的變大，若能進一步分析並加入其變動週期性，相信應該會有更好的結果。

表 3: 產品別(PS1)實驗數據所得的平均殘差比較表

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	9.70%	11.14%	13.26%	12.69%
5	10.46%	12.10%	13.47%	12.74%
6	9.96%	12.82%	13.60%	12.78%
7	10.07%	13.18%	13.98%	12.60%
8	10.70%	13.36%	14.12%	12.39%
9	11.44%	13.45%	14.24%	12.27%
10	12.07%	13.58%	14.17%	12.19%
11	12.16%	13.76%	13.83%	12.28%
12	11.79%	14.07%	12.99%	12.31%
Average	10.93%	13.05%	13.74%	12.47%

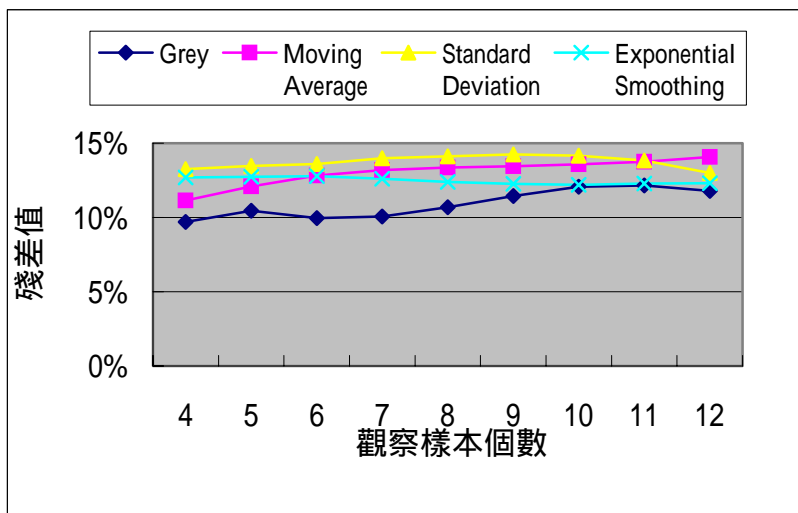


圖 2: 產品別(PS1)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

表 4: 產品別(PS2)資料實驗數據所得的平均殘差比較

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	16.26%	16.57%	21.52%	18.85%
5	16.36%	17.49%	21.85%	18.78%
6	17.03%	18.39%	22.11%	18.99%
7	17.44%	19.02%	21.95%	18.94%
8	17.39%	19.57%	21.87%	18.95%
9	16.67%	20.21%	21.08%	18.96%
10	16.79%	20.91%	20.83%	19.07%
11	16.80%	21.78%	20.46%	19.24%
12	17.30%	22.75%	19.98%	19.50%
Average	16.89%	19.63%	21.29%	19.03%

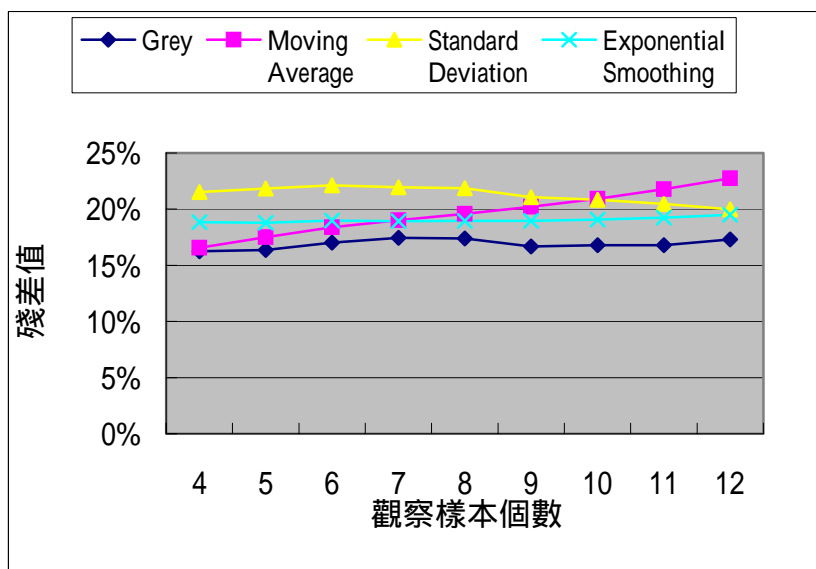


圖 3: 產品別(PS2)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

表 5: 產品別(PS3)實驗數據所得的平均殘差比較表

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	10.29%	12.22%	12.76%	15.40%
5	10.15%	13.31%	13.28%	15.30%
6	10.91%	14.16%	13.47%	15.47%
7	11.13%	15.30%	13.63%	15.38%
8	11.51%	16.23%	14.00%	15.35%
9	11.80%	17.15%	14.14%	15.41%
10	12.21%	18.05%	13.98%	15.54%
11	12.18%	18.86%	13.44%	15.56%
12	12.14%	19.87%	12.99%	15.81%
Average	11.37%	16.13%	13.52%	15.47%

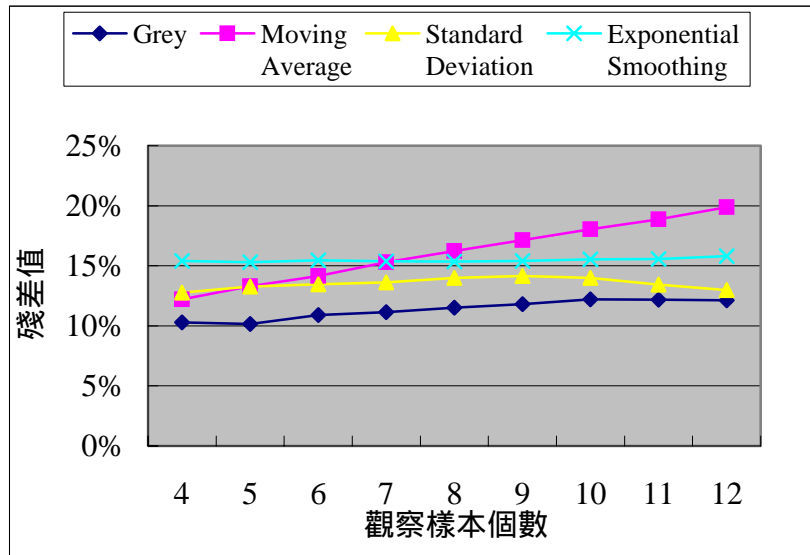


圖 4: 產品別(PS3)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

表 6: 客戶別(CS1)資料實驗數據所得的平均殘差比較

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	10.85%	13.09%	13.71%	16.33%
5	10.82%	14.22%	14.26%	16.22%
6	11.68%	15.40%	14.48%	16.40%
7	11.86%	16.27%	14.68%	16.32%
8	12.20%	17.22%	15.05%	16.28%
9	12.50%	18.16%	15.22%	16.34%
10	12.96%	19.07%	15.10%	16.48%
11	12.97%	19.89%	14.51%	16.50%
12	12.94%	20.91%	14.03%	16.76%
Average	12.09%	17.14%	14.56%	16.40%

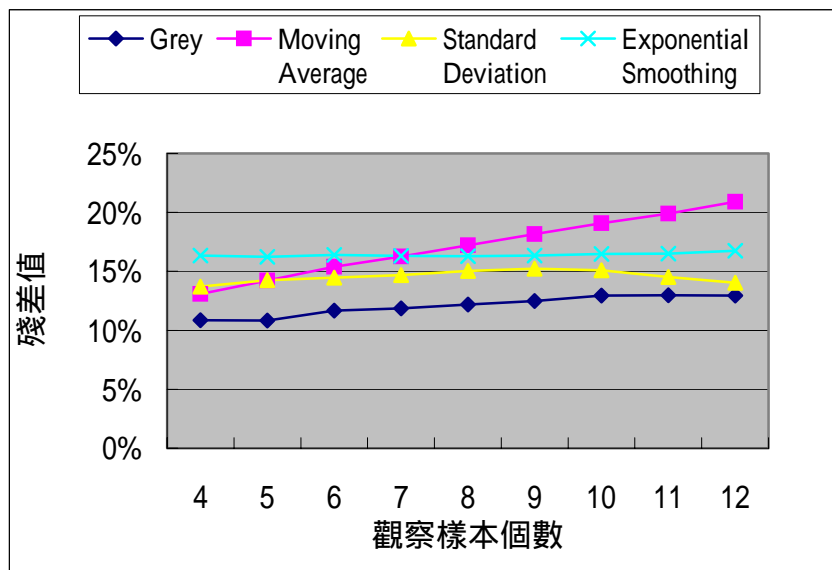


圖 5: 客戶別(CS1)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

表 7: 客戶別(CS2)實驗數據所得的平均殘差比較表

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	21.67%	22.50%	35.11%	22.63%
5	22.47%	23.34%	37.73%	22.45%
6	24.50%	23.69%	38.91%	22.34%
7	25.39%	23.77%	40.28%	22.10%
8	25.95%	23.74%	41.54%	21.77%
9	26.54%	24.67%	42.54%	21.38%
10	25.73%	25.94%	42.61%	21.42%
11	25.46%	27.05%	42.82%	21.75%
12	24.70%	28.01%	42.98%	21.90%
Average	24.71%	24.75%	40.50%	21.97%

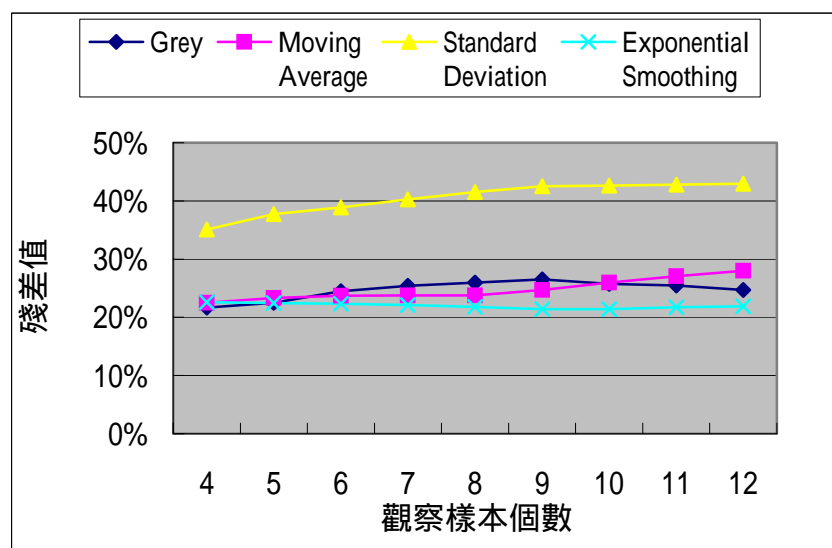


圖 6: 客戶別(CS2)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

表 8: 客戶別(CS3)資料實驗數據所得的平均殘差比較

Sample Size	Grey	Moving Average	Standard Deviation	Exponential Smoothing
4	19.35%	22.38%	32.37%	22.31%
5	19.89%	23.50%	34.84%	22.13%
6	21.21%	23.56%	35.69%	21.70%
7	23.86%	23.35%	37.17%	21.43%
8	26.07%	22.79%	37.96%	21.14%
9	26.43%	22.58%	37.86%	21.03%
10	24.55%	23.12%	36.93%	21.15%
11	22.97%	23.67%	35.68%	21.29%
12	21.37%	24.47%	34.30%	21.40%
Average	22.86%	23.27%	35.87%	21.51%

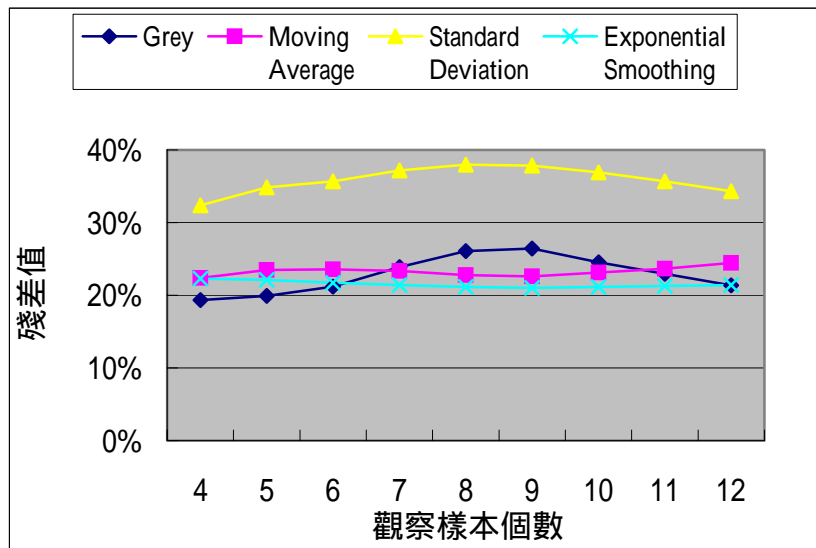


圖 7: 客戶別(CS3)資料實驗數據所得的平均殘差比較圖

(2) 動態期數灰預測模式

這個實驗主要目的是要設計一種可以自動選取觀察期數的灰預測法，避免與傳統的預測方法一樣，在人為選擇觀察期數時，因人為主觀的判斷錯誤，造成預測值的偏差。而且我們從上一個固定期數的灰色預測演算法實驗中，並無法很明確的確定那一個固定期數所得結果最佳。換言之，就是我們每次選擇的期數所得的預測值，有可能都是最差的殘差。所以這個實驗希望使用動態期數的演算法能夠比各種固定期數所得的平均值，有更佳的殘差。整個實驗所得的結果如表 9 和表 10，從這實驗的結果中可以發現採用變動式的觀察期數所進行的灰預測，將兩者殘差平均，確實比各種固定觀察期數的灰預測法，所得的總平均殘差有較佳的結果。

因此變動期數的灰色預測模式對於商業短期銷售預測確實是有幫助，它可以避免人為選擇樣本期數時，可能因為人為因素而造成偏差，同時所得的平均殘差也比各固定期數的總平均殘差來得低。

表 9：動態期數所得的平均殘差比較(產品別)

Sample Size		產品別		
		PS1	PS2	PS3
動態期數	前期殘差最低	10.37%	15.80%	9.91%
	前期平均殘差最低	9.65%	16.88%	10.95%
	平均值	10.01%	16.34%	10.43%
固定期數	4	9.70%	16.26%	10.29%
	5	10.46%	16.36%	10.15%
	6	9.96%	17.03%	10.91%
	7	10.07%	17.44%	11.13%
	8	10.70%	17.39%	11.51%
	9	11.44%	16.67%	11.80%
	10	12.07%	16.79%	12.21%
	11	12.16%	16.80%	12.18%
	12	11.79%	17.30%	12.14%
	Average	10.93%	16.89%	11.37%

表 10：動態期數所得的平均殘差比較(客戶別)

Sample Size		客戶別		
		CS1	CS2	CS3
動態期數	前期殘差最低	10.81%	25.10%	20.60%
	前期平均殘差最低	11.63%	23.10%	19.90%
	平均值	11.22%	24.10%	20.25%
固定期數	4	10.85%	21.67%	19.35%
	5	10.82%	22.47%	19.89%
	6	11.68%	24.50%	21.21%
	7	11.86%	25.39%	23.86%
	8	12.20%	25.95%	26.07%
	9	12.50%	26.54%	26.43%
	10	12.96%	25.73%	24.55%
	11	12.97%	25.46%	22.97%
	12	12.94%	24.70%	21.37%
	Average	12.09%	24.71%	22.86%

陸、結論

經過實驗的結果，本篇論文的結論如下：

- (1) 提出以灰色預測來解決短期銷售預測誤差大的問題，且灰色預測確實可以運用在企業的短期銷售預測，準確度比傳統的預測方法還要來得高。
- (2) 討論並分析不同期別數據的預測適用性，確定灰預測在少數數據的預測上，比傳統預測方法較佳。
- (3) 變動式的樣本選擇方式，並不會降低預測的準確度，同時能避免人為選擇樣本數所造成的偏差。
- (4) 提出一個系統架構來協助灰色預測與企業資訊管理系統結合。

整個研究過程中，雖然灰預測方法可以運用於企業的短期銷售預測，同時變動式的樣本選取方式，可以避免人為選擇樣本數所造成的偏差。但我們發現突然發生的異常數據，仍然是影響預測準確度最大的因素，如 CS2 與 CS3 資料中的變動性，即屬於此一情況，其將會增加灰預測在預估準確度上的難度。如何結合週期分析，找到變異點預測的方法，發展更高準確率的預測方法，以避免企業因誤差所造成的損失，是值得再深入研究的議題。

參考文獻

- [1] 葉涼川譯, Alex Berson, Stephen Smith, Kurt Thearling 著, *CRM Data Mining 應用系統建置*, 麥格羅希爾出版(2001)。
- [2] 葉若春, 生產計劃與管制, 中興管理顧問出版(1987)。
- [3] 方世榮譯, William J. Stevenson 著, 生產管理, 曉園出版(1988)。
- [4] 門田武治, 庫存管理新技術, 文岡圖書出版(1971)。
- [5] 吳漢雄、鄧聚龍、溫坤禮, 灰色理論入門, 高立出版(1996)。
- [6] 鄧聚龍、郭洪, 灰預測原理與應用, 全華出版(1996)。
- [7] 鄧聚龍, 灰色系統理論與應用, 高立出版(2000)。
- [8] 李峰、王仲東、鄧聚龍, "灰色系統理論發展的典型事例", 灰色系統理論與應用研討會(2000)。
- [9] 洪宗貝、王乾隆、葉佳炫, "應用灰色理論於財務時間序列變動性之分析", 灰色系統理論與應用研討會(2000)。
- [10] 范懿文、黃淇竣, 台灣地區資訊電子產品生命週期探討及展望, 中央大學碩士畢業論文, 民國 87 年 6 月。
- [11] 王瓊敏, "電腦關鍵零組件之價格預測模式", 全國碩士論文競賽論文集(2000)。
- [12] 吳哲全、游保杉, "灰色降雨預測模式之研究", 灰色系統理論與應用研討會(2000)。
- [13] Baan IV B20c.040, *Baan Company*, 1995 – 1997
- [14] Deng Julong, "The Control Problems of Grey System", *System and Control Letters*, 1982, No. 5, pp.288-294.
- [15] Michael J.A. Berry, Gordon S. Linoff, *Data Mining Techniques: for marketing, sales, and customer support*, John Wiley&Sons, Inc.,1997.
- [16] Rob Mattison, *Data Warehousing: Strategies, Technologies, and techniques*, McGraw-Hill Companies, Inc.,1996.
- [17] SAP 46D, *SAP AG*, 1993 – 2001.
- [18] W.H. Inmon, John A. Zachman, Jonathan G. Geiger, *Data stores, Data warehousing, and the Zachman Framework*, McGraw-Hill Companies, Inc.,1997.

